MENENTUKAN BENTUK KUADRAT BAGIAN KERUCUT DAN PERMUKAAN KUADRATIK DENGAN MENGGUNAKAN MATRIKS

Abstrak

Oleh :

Arwan Mhd Said, M.Si

Abstrak

Dalam menentukan bentuk kuadrat dengan menggunakan matriks, caranya adalah menghilangkan suku hasilkalidarisebuah bentuk kuadrat, yaitu dengan caramenggantivariabel,dankitaakan menggunakanhasilnyauntukmengkajigrafik bagian kerucut(irisan atau penampangkerucut, atauconicsection).

Permasalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dengan menggunakan matriks. Tujuan penelitian ini adalah menentukan suatu bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dengan mennggunakan matriks.

Dari hasil penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa menentukan bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dapat ditentukan dengan menggunakan matriks.

Kata Kunci : Matriks, Bentuk Kuadrat, Kerucut, Dan Permukaan Kuadratik.

I. **PENDAHULUAN**

Kata matematika secara bahasa (Lughawi) berasal dari bahasa Yunani yaitu *"mathema"* yang artinya hal-hal yang dipelajari. Nasoetion (1980:12) menyatakan bahwa matematika berasal dari bahasa Yunani *"mathein"* atau *"manthenein"* yang artinya mempelajari.Namun, secara istilah sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Matematikaadalahstuditentangkuantitas,struktur,ruangdan perubahan.Matematika dikembangkanmelalui penggunaan abstraksi dan penalaran logis mulaidariperhitungan,pengukurandanstudibentuksertagerakobyekfisis.

Matematika adalah studi tentang kuantitas,struktur, ruang dan perubahan. Matematika dikembangkan melalui penggunaan abtraksi dan penalaran logis mulai dari perhitungan, pengukuran dan studi bentuk serta gerak objek fisis. Banyak hukum fisika, kimia, biologi, dan ekonomi yang di uraikan dalam bentuk persamaan deferensial, yaitu persamaan-persamaan yang melibatkan fungsi-fungsi dan turunannya. Demikian juga dalam mengkaji grafik irisan kerucut dalam persamaan kuadratik banyak melibatkan konsep-konsep aljabar linear.[1]

Dalam memperdalam dan memperluas materi-materi matematika lanjut lainnya banyak pula yang memerlukan konsep-konsep aljabar linear, misalnya geometri dengan operator linear pada R^2penyesuaian *(fitting)* suatu kurva kedata percobaan, persamaan normal, pengukuran galat sampai permukaan kuadratik dalam geometri analitik bidang maupun ruang.

Informasi dalam bidang sains dan matematika seringkali ditampilkan dalam bentuk baris-baris dan kolom-kolom yang membentuk jajaran empat persegi panjang yang disebut "matriks". matriks seringkali merupakan tabel-tabel data numerik yang diperoleh melalui pengamatan fisik, tapi dapat juga muncul dalam berbagai macam konteks matematis.[2]

Bagaimana cara menentukan bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dan penerapan bentuk kuadrat bagian kerucut. Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah dengan menggunakan matriks.

Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang diatas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dengan menggunakan matriks?

Batasan Masalah

Adapun batasan penelitian ini yaitu pada bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dengan menggunakan matriks ordo tiga (3×3).

Tujuan penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu bagaimana menentukan suatu bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dengan menggunakan matriks.

1. Abdusysyakir. (*KetikaKyaiMengajarMatematika,2007).* H.5
2. Howard Anton. (Aljabar linier elementer, 1987).h23

Manfaat Penelitian

Dari hasil penelitian ini di harapkan dapat memberikan manfaat antara lain:

1. Dari individu penulis dapat menambah wawasan dan sumbangan pemikiran tentang bagaimana menentukan bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik menggunakan matriks.
2. Secara umum dapat memberikan sumbangan pemikiran dalam penulisan dan memperdalam wawasan tentang cara menyelesaikan bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dengan menggunakan matriks.
3. Agar dapat memberikan motifasi atau masukan bagi para penulis yang akan datang khususnya penelitian yang sesuai dengan penelitian ini

Metodologi Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (kajian pustaka) yang bersumber dari buku-buku teks penunjang, makalah, dan jurnal yang berkaitan dari judul penelitian ini.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 1. Matriks merupakan suatu kumpulan dari angka-angka (elemen-elemen) yang di susun melulai baris dan kolom,sehingga berbentuk segi empat siku-siku dengan panjang dan lebarnya di tentukan oleh baris dan kolom.[3]

Bentuk umum dari matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.1. Determinan

Definisi 2. Determinan matriks merupakan bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi n^2 elemen bujur sangkar. Determinan matriks hanya didefinisikan pada matriks bujur sangkar (matriks kuadrat).[4]

Notasi determinan matriks A yakni $det(A) = |A|$

2.1.2. Invers Matriks

Definisi 3. Jika *A*dan *B* matriks bujur sangkar sedemikian sehingga$AB=BA=I$, maka$B$disebutinversdari$A$danditulis$B=A^{-1}$.Matriks$B$juga mempunyai inversyaitu ditulis $A= B^{-1}$

2

3. Rumita. (*matriks persamaan linier dan program linier*, (2009).h.12
4. H.Purwanto, (*Aljabar Linier*, 2005) h. 17

D ... nyai besar dan arah.Di dalam semesta ini banyak permasalahan riil yang sering dihadapi terkait dengan masalah vektor. Pada bidang pelayaran dapat dijumpai permasalahan bagaimana menyatakan posisi sebuah kapal dilihat dari menara pengawas. Pengertian posisi sebuah kapal dapat diartikan sebagai jarakdan arah kapal dari menara pengawas. Misalkan diberikan sebuah titik dibidang R^2 atau A=($X_{1,}$ Y_1) maka di dapatkan ruas garis berarah dari titik pusat sumbu 0 (0,0) ke titik A.[5]

2.3 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

Definisi 4. Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka sebuah vektor taknol x pada R^2 disebut vektor eigen dari A, jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x$$

Untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkaitan dengan λ.[6]

2.4. Diagonalisasi

Definisi 5. Sebuah matriks bujursangkar A dikatakan dapat diagonalisasi jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal, matriks P mendiagonalisasi A.[7]

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Diagonalisasi Ortogonal

Jika diberikan sebuah matriks A n x n. Terdapat sebuah matriks orthogonal P sehingga matriks $P^{-1}AP = P^T AP$ adalah diagonal. Maka matriks A dikatakan dapat

5. B. Harahap. (Enslikopedia Matematika, 2003).h.57
6. Rumita. (Matriks persamaan linier dan program linier, 2009).h.29
7. J. Supranto. (*Pengantar Matriks*, 1992) h.36

orthogonal matriks A. Untuk dapat mendiagonalisasi matriks A secara orthogonal, apabila A simetrik yaitu $A = A^T$. Misalkan: $P^T AP = D$

Dimana p adalah sebuah matriks orthogonal dan D adalah sebuah matriks diagonal. Karena P orthogonal $PP^T = P^T P = 1$ sehingga dapat ditulis: $A = PDP^T$

Karena D adalah sebuah matriks diagonal maka diperoleh $D = D^T$, sehinggan dengan mentransposkan keduanya dapat ditulis hasilnya sebagai berikut.

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

Sehingga A adalah simestrik.

2.5 Bentuk-Bentuk Kuadrat

Bentuk kuadrat mendefinisikan sebuah persamaan linear dalam bentuk n variabelx_1,x_2, x_3, ..$x_n$yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = d$

Ruas kiri persamaan ini, yaitu $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = d$

Merupakan sebuah fungsi dalam n variabel (fungsi peubah n), yang dinamakan bentuk linear. Fungsi yang dinamakan bentuk kuadratyang suku-sukunya adalah kuadrat dari variabel atau hasil kali dua variabel. Sebuah persamaan yang berbentuk sebagai berikut:$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

dengan a, b, c, …, f adalah bilangan-bilangan real dengan a, b, dan c tidak sekaligus nol, dinamakan sebuah persamaan kuadrat dalam x dan y. Sedangkan,

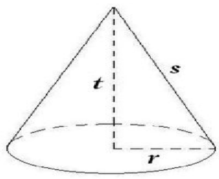
$$ay^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

Dinamakan bentuk kuadrat terasosiasi(*associated quadratic form*) atau bentuk kuadrat dalam 2 variabel.

2.6. Pengertian Kerucut

Definisi 6. Kerucut adalah suatu bangun ruang. Kerucut dapat dibentuk dari sebuah segitiga siku-siku yang diputar dimana sisi siku-siku sebagai pusat putaran. Kerucut dalam giometri adalah sebuah limas yang beralas lingkaran kerucut.Juga memiliki 2 sisi dan 1 rusuk. Sisi tegak kerucut tidak berupa segitiga tapi berupa bidang lengkung yang di sebut selimut kerucut. [8]

8. H. Karso. (*Penerapan aljabar linier*, 2003).h.29



Gambar 1: Kerucut

Dimana: r = jari-jari lingkarang alas, t = tinggi dan s = selimut

maka luas kerucut : $L = \pi r^2 + 2\pi r \times \frac{1}{2} s$ atau $L = \pi r(r + s)$

2.6.1. Rumus-Rumus Kerucut

Ada beberapa rumus-rumus kerucut diantaranya sebagai berikut:

1. Luas alas: $L = \pi r^2$
2. Luas selimut: $L = \pi\, r\, s$
3. Luas permukaan: $L = \pi\, r^2 + \pi\, r\, s \;\; atau\, \pi\, r\, (r.s)$
4. Volume: $V = {}^1\!/_3\ .\pi\, r^2.t$

Definisi Irisan Kerucut

Irisan kerucut adalah sebuah bangun datar yang diperoleh dengan cara memotong kerucut lingkaran tegak berselimut ganda menurut aturan tertentu.

2.6.2. Macam – Macam Irisan Kerucut

Berdasarkan letak bidang datar yang mengirisnya, maka irisan kerucut dapat berupa titik, garis, segitiga, lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola.

- Jika bidang yang mengiris melalui puncak kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa *titik*.
- Jika bidang yang mengiris berimpit dengan garis pelukis kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa sebuah *garis*.
- Jika bidang yang mengiris melalui sumbu simetri kerucut dan tegak lurus lingkaran alas, maka irisan terbentuk berupa *segitiga*.
- Jika bidang yang mengiris tegak lurus sumbu simetri kerucut, tetapi tidak melalui puncak, maka irisan yang terbentuk berupa *lingkaran*.
- Jika bidang yang mengiris sejajar garis pelukis kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa *parabla.*

- Jika bidang yang mengiris tidak melalui puncak, tidak memotong lingkaran alas, tidak sejajar sumbu simetri maupun garis pelukis kerucut, maka irisan yang terbentuk berupa *elips*.
- Jika bidang yang mengiris tidak melalui puncak, memotong lingkaran alas, dan tidak sejajar sumbu simetri maupun garis pelukis kerucut maka irisannya berbentuk *hiperbola*.

IIIPEMBAHASAN

3.1. Penerapan Bagian Kerucut (Konik) Menggunakan Matriks

Pada penerapan ini, dengan menghilangkan suku hasil kali dari sebuah bentuk kuadrat yaitu dengan cara menggantikan variable untuk mengkaji grafik bagian kerucut (irisan atau penampang bagian kerucut atau *conic section*). Misalkan

$$x^t Ax = [x_1 x_2 ......x_3]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

adalah bentuk kuadrat dengan A berupa matriks simetris. Ada suatu matriks ortogonal P yang mendiagonalisasi A, yaitu

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots , \lambda_n$adalah nilai-nilai eigen A.

Misalkan $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

dengan $y_1, y_2, \ldots, y_n$adalah variabel-variabel baru, dan jika kita melakukan substitusi **x** = P **y** pada (12), maka akan didapatkan $x^t Ax = (Py)^t APy = y^2 P^t APy = y^t Dy$

Namun

$$y^t Dy = (y_1, y_2, \ldots., y_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots\ldots + \lambda_n y_n^2$$

yang merupakan bentuk kuadrat tanpa suku-suku hasil kali.

3.2 Irisan Kerucut

Jika benda dalam posisi standar relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat.Maka irisan-irisan kerucut yang paling penting adalah elips, lingkarang, hiperbola, dan parabola.Irisan-irisan kerucut ini adalah irisan-irisan kerucut yang tidak mengalami degenerasi.

Contoh 1. Karena persamaan kuadrat $x^2 + 4y - 6x + 17 = 0$

memuat suku-suku x^2, y, dan x tetapi tidak memuat suku hasil kali (suku xy), maka grafiknya adalah suatu irisan kerucut yang dipindahkan ke luar dari posisi yang standar tetapi tidak diputar. Irisan kerucut ini dapat dibawa ke posisi standar dengan menggeser sumbu-sumbu koordinatnya secara tepat.. Hal ini menghasilkan persamaan-persamaan yang ekuivalen, yaitu

$x^2 + 4y - 6x + 17 = 0$ atau $\Leftrightarrow x^2 - 6x = -4y - 17$

sehingga akandidapatkan $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -40 - 17 + 9$

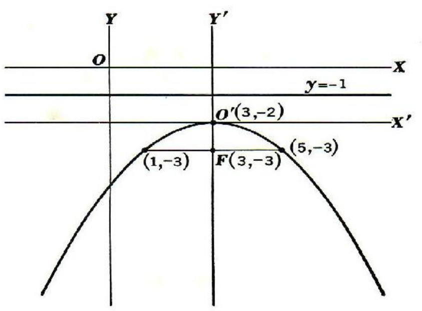
$\Leftrightarrow (x-3)2 = -4(y+2)$ …………….. (1)

Jika menggeser suku-suku koordinat dengan menggunakan persamaan pergeseran (persamaan translasi)

$$x'' = x - 3, y'' = y + 2 \qquad \text{……………….. (2)}$$

maka persamaan (1) menjadi bentuk $x''2 = -4y$

yang merupakan persamaan parabola dalam posisi standar pada sistem koordinat $x''y''$ dengan titik pangkal koordinat yang baru (a , b) = (3 , - 2) (Gambar 4). Persamaan ini menyatakan sebuah parabola yang terbuka ke bawah dengan titik puncak (3 , -2), titik fokus (3 , -3), dan direktriksnya y = -1.



Gambar 4. Parabola dengan posisi standar

Sekarang bagaimana mengidentifikasi bangun-bangun irisan kerucut yang dirotasi keluar dari posisi standarnya.Untuk itu kita tinjau kembali bentuk umum persamaan kuadrat dalam variabel x dan y (yaitu persamaan 2).

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow x^t Ax + Kx + f = 0$$

Dengan $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$

Selanjutnya, irisan kerucut C yang persamaannya pada sistem koordinat x y (XOY) adalah $x^t Ax + Kx + f = 0$ …………………. (3)

Kita akan memutar (merotasikan) sumbu-sumbu koordinat x y sehingga persamaan irisan kerucut dalam sistem koordinat $x''y''$ yang baru tidak menurut suku hasil kali.

Langkah 1. Carilah suatu matriks

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ yang secara ortogonal mendiagonalkan bentuk kuadrat x^tA **x**.

Langkah 2. Jika perlu, pertukarankan kolom-kolom P, untuk menjadikan det (P) =1. Hal ini menjamin bahwa transformasi koordinat ortogonal

$$x = Px'', yaitu \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$ ………………….. (4)

adalah suatu rotasi.

Langkah 3.Untuk mendapatkan persamaan C pada sistem koordinat $x''y''$,

Substitusikanlah (4) ke persamaan (3).Hal ini menghasilkan

$$(Px)^t A(Px'') + K(Px'') + f = 0$$

$$\Leftrightarrow (x'')^t (P^t AP)x'' + (KP)x'' + f = 0$$ ………………… (5)

Karena P mendiagonalkan A secara ortogonal, $P^t AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah nilai-nilai eigen A. Jadi persamaan (5) diperoleh:

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + d''x'' + e''y'' + f = 0$$

(dengan $d'' = dp_{11} + ep_{21}$ dan $e'' = dp_{12} + ep_{22}$). Persamaan ini tidak memuat suku hasilkali (suku xy).

Contoh 2. Jelaskan irisan kerucut C yang persamaannya adalah $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$

Penyelesaian:

Bentuk matriks dari persamaan ini adalah $x^t Ax - 36 = 0$ ....(6)

$$\Leftrightarrow \quad [x \quad y]\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} - 36 = 0$$

Persamaan karakteristik matriks A adalah $\text{Det}(\lambda I - A) = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$

sehinga nilai-nilai eigen A adalah λ = 4 dan λ = 9.

Jadi, matriks yang mendiagonalisasi $x^t = Ax$ secara ortogonal adalah

$$P = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

det (P) = 1 sehingga transformasi koordinat ortogonal adalah

$x = Px''$ .... (7)

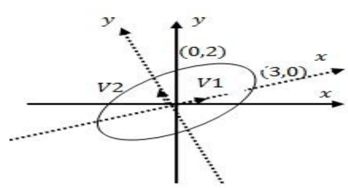
adalah sebuah rotasi. Dengan mensubstitusikan (7) ke (6) menghasilkan

$(Px'')^t A(Px'') - 36 = 0$

Karena $P^t AP = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$ Maka persamaannya dapat ditulis sebagai

$$[x' \quad y'']\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} - 36 \Leftrightarrow \frac{x^1}{9} + \frac{y^1}{4} = 1$$

berupa persamaan ellips yang sketsa grafiknya ditunjukkan oleh Gambar 5



Gambar 5. Ellips dengan vektor kolom P

3.3. Menentukan Permukaan Kuadratik Menggunakan Matriks

Pada sub bab ini permukaan kuadratik bagian diagonalisasi pada persamaan kuadrat dengan tiga variabel.

Sebuah persamaan yang berbentuk sebagai berikut:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

dengan a, b, c, .., f tidak semuanya nol, dan dinamakan persamaan kuadratdalam variabel x, y, dan z, sedangkan ungkapan $ax^2 + by + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ dinamakanbentuk kuadrat terasosiasi (*assosiated quadratic form*).

Persamaan (8) dapat kita tulis dalam notasi matriks seperti berikut

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^t Ax + Kx + j = 0$$

dengan $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & e \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}$

Contoh 3. Bentuk kuadrat yang diasosiasikan dengan persamaan kuadrat

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz + 7x + 2y + 3z - 7 = 0$$

adalah bentuk $3x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy + 3xz - 8yz$

Grafik-grafik dari persamaan-persaman kuadrat dalam x, y, dan z dinamakan kuadratik(*quadric*) atau permukaan kuadratik(*quadric surfaces*).Sebuah kuadratik yang persamaan dan sketsa grafiknya ditunjukkan dalam Gambar 6 dikatakan berada dalam kedudukan standar relatif terhadap sumbu-sumbu koordinat.

Munculnya satu atau lebih suku hasil kali xy, xz, dan yz dalam persamaan sebuah kuadratik menunjukkan bahwa kuadratik dirotasikan ke luar dari posisi standar.Sedangkan munculnya dua suku yaitu suku-suku x^2dan x, suku-suku y^2dan y, atau suku-suku z^2dan z dalam sebuah persaman kuadratik tampak suku hasil kali menunjukkan bahwa kuadratik tersebut digeser dari posisi standar.

a). elipsoida : $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$

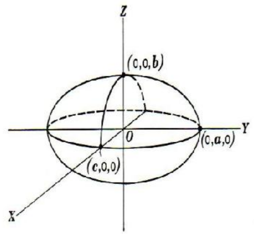
b). paraboloida eliptik: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 = 0$

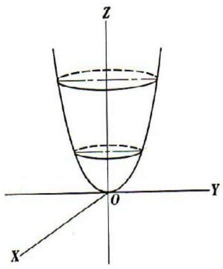
c). hiperboloida daun (cabang) satu: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

d). hiperboloida daun (cabang) dua: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

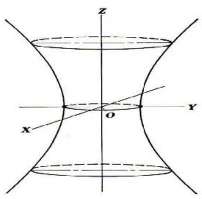
e). kerucut elipstik: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

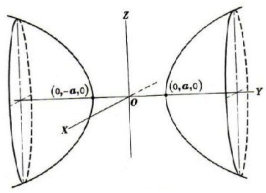
f). paraboloida hiperbolik: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} + z = 0$



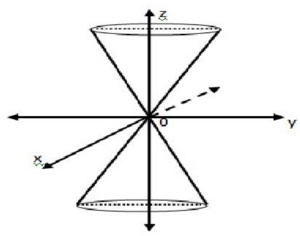


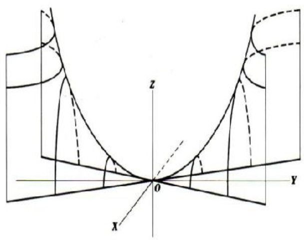
Gambar 6 (a) elipsoida Gambar 6 (b) paraboloida eliptik





Gambar 6 (c) hiperboloida daun satu Gambar 6 (d). hiperboloida daun dua





Gambar 6 (e) kerucut elipstik Gambar 6 (f). paraboloida hiperbolik

Contoh 4. Uraikanlah persamaan permukaan kuadratik berikut

$3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$

Penyelesaian:

Dengan menyusun kembali suku-sukunya dan dengan melengkapkan kuadrat akandidapatkan:

$3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x = -144$

$\Leftrightarrow 3(x^2 + 14x + 49) - 3y^2 - z^2 = -144 + 147$

$3(x+7)^2 - y^2 - \dfrac{z^2}{3} = 1$

Pergeseran sumbu dengan menggunakan persamaan $x'' = x + 7$ akan menghasilkan:

$\dfrac{(x')^2}{1} - \dfrac{(y')^2}{1} - \dfrac{(z')^2}{1} = 1$

Persamaan ini merupakan sebuah hiperboloida bercabang dua.

Yang terkait dengan eliminasisuku hasil kali dari persamaan kuadrat dalam variabel x, y, dan z (permukaan kuadrik).Untuk mengidentifikasi kuadrik yang dirotasikan dari posisi standar serupa dengan irisan kerucut (konik). Misalkan Q sebuah permukaan kuadrik yang persamaannya pada sistem koordinat xyz adalah

$$x^t Ax + Kx + y = 0 \quad \text{……………………..} \quad (9)$$

Dalam hal ini kita ingin merotasikan sumbu koordinat xyz, untuk mendapatkan persamaan kuadrik pada sistem koordinat $x''y''z''$ yang baru tidak mempunyai suku hasil kali.Hal ini bisa kita lakukan melalui beberapa langkah berikut ini.

Langkah 1.Carilah sebuah matriks P yang mendiagonalkan $x^t A\mathbf{x}$ secara ortogonal.

Langkah 2. Jika perlu, tukarkanlah dua kolom dari matriks P, untuk mendapatkan det (P) = 1. Ini menjamin bahwa transformasi koordinat ortogonal

$$x = Px', \quad yaitu \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{…………} \quad (10)$$

adalah sebuah rotasi.

Langkah 3.Substitusikanlah (10) ke dalam (9). Dari sini akan mendapatkan sebuah persamaan untuk kuadrik pada koordinat $x''y''z''$ tanpa suku hasil kali.

Contoh 5. Diketahui permukaan kuadrik dengan persamaan

$2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$

Carilah $x = Px''$ yang akan menghilangkan suku-suku hasil kali. Kemudian namailah kuadrik tersebut dan berikan pula persamaannya pada sistem kordinat $x''y''z''$.

Penyelesaian:

Bentuk matriks untuk persamaan kuadrat di atas adalah

$x^t Ax + 150 = 0$ .... (11)

dengan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 36 \\ 0 & 3 & 0 \\ 36 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari A adalah λ = - 25, λ= 3, dan λ = 50. Vektor-vektor ortogonal dari ruang-ruang eigen yang bersesuaian denga nilai-nilai tersebut berturut-turut:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad dan \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks yang mendiagonalisasi A secara ortogonal, yaitu sebagai berikut:

Dan $P^t AP = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$

Karena det (P) = 1, maka transformasi koordinat ortogonal $x = Px''$ adalah sebuah rotasi.maka didapatkan

$(Px'')^t A(Px'') + 150 = 0$

$\Leftrightarrow 25(x'')^2 - 3(y'')^2 - 50(z'')^2 - 150 = 0$

Persamaan permukaan kuadratik ini merupakan persamaan hiperboloida cabangdua.

IV. PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan analisa yang dilakukan, maka penulis mengambil kesimpulan bahwa kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik dapat ditentukan dengan menggunakan matriks.

a. **Aproksimasi**,**hampiran**,*aproximation*adalahpendekatan yang terbaikyang mendekatinilaiatau fungsiyangsebenarnya.
b. **Bentuk kuadratterasosiasi**,*associatedquadraticform*,adalahpersamaankuadrat denganxdany sebagaivariabeldalambentukax^2+2bxy +cy^{2}untuka,b,danc bilangan

realyangtidak sekaligusnol.

c. **Galat**,**deviasi**, *error* atau *deviation*, adalahkesalahan atau penyimpangandarinilai yangsebenarnya.

d. **Konik,irisankerucut, penampang kerucut,** *conic*atau*conicsection*adalah irisanantarabidang datardengankerucut lingkarantegakyangdapatberupatitik, garis, lingkaran, parabola,ellips, atau hiperbola.

e. **Kuadrik**(*quadric*),**permukaankuadrik** (*quadricsurfaces*)adalahgrafikdari persamaan kuadratdalamtigavariabel.

f. **Masalahnilaiawal**, *initialvalueproblem*adalahmasalahmenyelesaikansuatu persamaan diferensialyangmemenuhisyarat awal.

g. **Penyelesaian umum**,*generalsoluion*,adalahbentukkhusus suatufungsiyang menjadi penyelesaian dari suatu persamaan diferensial yang mempunyai tak hinggabanyak penyelesaian.

h. **Penyelesaian khusus**,*paticular solution*adalahsolusidaripenyelesaianumum suatu persamaan diferensialdisebabkan keberadaan syarat tambahan.

i. **Persamaankuadratdalam xdany**,*quadratic equation xandy*adalah persamaan dalam x dan y sebagai variabel-variabelnya dan paling tinggi variabelnya berderajatdua.

j. **Syaratawal**, *initial condition*adalah sebuahsyarattertentuyang menentukannilai penyelesaian padasebuahtitik.

Langkah-langkah dalam menyelesaikan kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik diantaranya:

a) Dengan menentukan nilai-nilai eigen $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ dari $(\lambda I - A)x = 0$.

b) Menentukan vektor eigen dari sebuah matriks A yang berkaitan dengan λ yaitu $P_1, P_2, ..., P_n$ dari vektor eigen itu dibentuk sebuah matriks P yang mendiagonalisasi matriks A.

c) Proses mendiagonalisasi matriks $A(D = P^{-1}AP$. (4). Proses diagonalisasi orthogonal $A(D = P^{T}AP$. (5). Menentukan bentuk kuadrat ke matriks $ax^2 + byx + cy^2 = 0$

SARAN

Penulis mengharapkan dalam metode ini dapat dijadikan sebagai salah satu pembelajaran atau motivasi dalam mata kualiah Aljabar Linear, dan bagi para penelitian lanjutan agar dapat mmengkaji lebih dalam lagi mengenai cara menentukan bentuk kuadrat bagian kerucut dan permukaan kuadratik menggunakan matriks ordo empat (4×4) dan memperbanyak referensi-referensi dengan buku-buku edisi terbaru guna penyempurnaan isi dari tulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir.2007.*KetikaKyaiMengajarMatematika,*UINPress:Malang.

B. Harahap. 2003. Enslikopedia Matematika. Dekdibud. Jakarta

Criss Rorres dkk, 2004, *Aljabar Linear Versi Aplikasi*. Jakarta: PT Erlangga.

Dr. Rumita, 2009, *Matriks Persamaan Linier dan Pemograman* Linier. Bandung : Rekayasa Sains

Erlina Dayanti, 2005, *Aljabar Linier.* Jakarta : PT Ercontara Rajawali

Gina Indriani, 2005, *Aljabr Linier.* Jakarta : PT Ercontara Rajawali

Howard Anton, 1992, *Aljabar Linier Elementer*. Jakkarta : PT Erlangga.

Heri Purwanto, 2005, *Aljabar Linier*. Jakarta : PT Ercontara Rajawali

J. Suprapto M.A, 1992, *Pengantar Matriks*, Jakarta: Lembaga Penerbit FE-UI.

LeitholdLouis, 1981, *The Calculus with Analytic Geometry* : New York

Negoro ST, 1998, *Ensiklopedia Matematika*, Jakarta : PT Ghalia Indonesia